The Haskell Programmer's Guide to the IO Monad
— Don't Panic —
第5回

下村翔

平成 20 年 7 月 17 日

6 Monads

6.1 An alternative definition of the monad

この節では、Haskell ユーザのためのモナドの定義について考えていく。まず前節での bind の定義を使って 3 つのモナド則 (three monad laws) を導く。次に 3 つのモナド則が前節でのモナドの条件を満たしていることを示す。つまり前節のモナドの条件と 3 つのモナド則が同値であることを示す。

6.3.1 Definition

$$\begin{aligned} >>= : \ FA \times (A \to FB) &\to FB \\ x, f &\mapsto (\mu_B \circ Ff)x. \end{aligned}$$

ここで $x \in FA$ である。この定義の場合は型 FA が要素を持つことが必須だが、より一般的な Kleisli star というものを考えることもできる。

6.3.2 Definition

$$\begin{aligned} * \ : \ (A \to FB) &\to (FA \to FB) \\ f &\mapsto \mu_B \circ Ff. \end{aligned}$$

明らかに $\forall x \in FA; \ \ \forall f : A \to FB \ \ x >>= f = f * \ x.$ である。Kleisli star は bind のポイントフリースタイルで、引数に関する制限は特にない。bind は Kleisli star の特殊な場合だが、今後は Haskell プログラマのために bind を使う。

μ と η はそれぞれファンクタ F を付け足したり外したりする自然変換であるから、>>= の動作は F でマップしたオブジェクトを自然変換して F を取り除いていると考えることができる。

6.3.3 Lemma The three monad laws are:

1. η_A は >>= の左単位元
   $\forall f \ : \ A \to FB; x \in A \ \ \eta_A x >>= f \ = \ fx.$

2. η_A は $>>=$ の右単位元
$\forall x \in FA \;\; x >>= \eta_A \;=\; x$

3. $>>=$ は結合律を満たす
$\forall x \in FA; f : A \to FB; g : B \to FC$
$(x >>= f) >>= g \;=\; x >>= (y \mapsto fy >>= g)$

まずはこれを証明しよう！その次にこれら 3 つのモナド則から前節でのモナドの条件を満たすことを確認する (はず)。

6.3.4 Proof!　やってみよう！

6.3.5 Theorem　$\mathcal{C}$ をカテゴリ、$F_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ を任意のオブジェクトのマッピングとする。次の関数を考える。

$$\begin{array}{rcl} \eta : \mathcal{O} & \to & \mathcal{M} \\ A & \mapsto & \eta_A \end{array}$$

ここで $\eta_A : A \underset{C}{\to} FA$ である。また、

$$>>=: F_{\mathcal{O}}A \times (A \to F_{\mathcal{O}}B) \to F_{\mathcal{O}}B.$$

とする。このとき、3 つのモナド則が満たされる時かつその時に限り 3 つ組 $(F_{\mathcal{O}}, \eta, >>=)$ はモナドとなる。
　η は自然変換である必要はない点に注意すること。

6.3.6 Definition　Theorem 6.3.5 の条件の下で、μ と $F_{\mathcal{M}}$ を、全ての $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ と $f : A \underset{\mathcal{C}}{\to} B$ に対して定義することができる。

$$\begin{array}{rcl} \mu_A : F_{\mathcal{O}}^2 A & \to & F_{\mathcal{O}}A \\ x & \mapsto & x >>= id_{F_{\mathcal{O}}A} \\ F_{\mathcal{M}}F : F_{\mathcal{O}}A & \to & F_{\mathcal{O}}B \\ x & \mapsto & x >>= \eta_B \circ f. \end{array}$$

以降、特に混乱のない場合には $F_{\mathcal{O}}$ と $F_{\mathcal{M}}$ を単に F と書く。

Proof!　Lemma 6.6.3 のおかげで、F がファンクタの性質を持つことと、η が自然変換であることと、3 つのモナド則からモナドの定義が導かれることを証明するだけでよい。やってみよう！

Part I　F がファンクタの性質を持つことを証明。

Part I.a　$F_{\mathcal{M}}$ は型情報を保存する。つまり $\forall f : A \to B \;\; Ff : FA \to FB$ が保たれる。これは定義から明らか。

Part I.b　$F_{\mathcal{M}}$ は identities を保存する。すべての $x \in FA$ に対し、$(Fid_A)x \;=\; x >>= \eta_A \circ id_A \;=\; x >>= \eta_A \;=\; x \;=\; id_{FA}x$ である。

Part I.c $F_{\mathcal{M}}$ の分配律。任意の $x \in FA, F : A \to B, G : B \to C$ に対し、$(Fg \circ Ff)x \ = \ ... \ = \ (F(g \circ f))x$ となる。つまり $\forall f : A \to B; g : B \to C \ \ F(g \circ f) \ = \ Ff \circ Gf$ となる。
同時に F はカテゴリ $\mathcal{C}$ での endofunctor であることも言える。

Part II F がファンクタであるとき、定義から η は $I_{\mathcal{C}}$ から F への変換である。自然変換であることを示すために、任意の $x \in A$ と $f : A \to B$ を選ぶ。すると $(Ff \circ \eta_A)x \ = \ ... \ = \ (\eta_B \circ If)x$ であるので、$\eta : I_{\mathcal{C}} \dot{\to} F$ である。

Part III $\mu(\eta F) \ = \ id_F \ = \ \mu(F\eta)$ を示すために、2 つの式に分けて証明を行う。任意の $A \in \mathcal{O}$ と $x \in FA$ を考える。

Case III.a 等式の左側を証明する。$(\mu A \circ \eta FA)x \ = \ ... \ = \ x$

Case III.b 等式の右側を証明する。$(\mu A \circ F\eta A)x \ = \ ... \ = \ x$